数理解析研究所講究録
414巻 1981年 1-8

定常軸対称 Einstein 方程式の準周期解の構成について

京大 教養　伊達悦朗

定常軸対称な Einstein 方程式，つまり

$$-ds^2 = f(d\rho^2+dz^2) + g_{ab}\,dx^a dx^b \ , \ a,b=0,1 \ , \ \det(g_{ab}) = -\rho^2$$

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, \rho, z)$$

f, g_{ab} は (ρ, z) のみの関数，

の形の metric に対して，それから計算される Ricci tensor $R_{ij}=0$ という形で表わされる f, g_{ab} に対する二階の非線型偏微分方程式系，の解を求める方法について，最近いろいろな立場から論じられている．

その中で，Belinski-Zakharov [1] は，この方程式系をパラメーターを含む線型方程式系の可積分条件の形に書き，一種の Bäcklund 変換を与えた：

今の metric の形の場合，$R_{ij}=0$ なる方程式系は次の形にまとめられる。

$$
\begin{cases}
(\rho g_\rho g^{-1})_\rho + (\rho g_z g^{-1})_z = 0, \quad g = (g_{ab}), & (1) \\
(\log f)_\rho = -\rho^{-1} + (4\rho)^{-1} \mathrm{tr}\left((\rho g_\rho g^{-1})^2 - (\rho g_z g^{-1})^2\right), \\
(\log f)_z = (2\rho)^{-1} \mathrm{tr}(\rho^2 g_\rho g^{-1} g_z g^{-1}).
\end{cases}
$$

この方程式の形から，$\log f$ の微分係数は，g, ρ のみで表わされていることがわかる。又，$\log f$ に対する可積分条件も g が(1)をみたしていれば，みたされることがわかる。従って以下では，(1)をみたし，対称で $\det g = -\rho^2$ となる g を求めることを問題とする。

新しい変数 U, V を

$$
U = \rho g_\rho g^{-1}, \quad V = \rho g_z g^{-1}
$$

によって導入すると，考える方程式系は

$$
\begin{cases}
U_\rho + V_z = 0 \\
U_z - V_\rho + \rho^{-1} V + \rho^{-1} [U, V] = 0
\end{cases} \qquad (2)
$$

となる。（二番目の方程式は，U, V が与えられたとき，それから，$g_\rho = \rho^{-1} U g$，$g_z = \rho^{-1} V g$ をみたす g が求まるための可積分条件）

Belinski－Zakharov は，この方程式系(2)が線型方程式系

$$
D_1 \psi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2} \psi, \quad D_2 \psi = \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2 + \rho^2} \psi, \quad \psi = \psi(\lambda, \rho, z) \qquad (3)
$$

$$
D_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \rho^2} \partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2 + \rho^2} \partial_\lambda, \quad \lambda : \text{パラメーター}
$$

の可積分条件であることを指摘した。

線型方程式系(3)をみたす，ψ, U, V があれば，U, V は (2) をみたすが，更に，$g_\rho = \rho^{-1} U g$，$g_z = \rho^{-1} V g$ をみたす g は

$g = \psi(0, \rho, z) C$，C は定数行列，の形で求められることがわかる。そして $g_P = -\rho(-\det g)^{-\frac{1}{2}} g$ とおくと，g_P は (1) をみたし，$\det(g_P) = -\rho^2$ をみたすことがわかる。従って，この g_P (g) が対称になっていれば，定常軸対称な Einstein 方程式の解が得られることになる。

Belinski - Zakharov は，定常軸対称な Einstein 方程式の一つの解 f_0, g_0 が与えられたとき，（従って，U_0, V_0, ψ_0 が与えられたとき），それらを用いて，(3)をみたす，新しい ψ, U, V（ψ は $\psi = \chi \psi_0$ の形で）を構成する方法を与えている。その際に，得られる g (g_P) が対称になるように構成している。

このノートでは，まず Belinski - Zakharov の構成法を，少し異なる立場から把えることから始めて，続いて，準周期解（適切な呼び方ではないかも知れないが）の構成について考える。

従来，散乱の逆問題の方法が適用されている非線型方程式の多くの場合には，対応する線型方程式は，パラメーター λ に関する微分を含まず，λ は独立変数には依存していなかった。そのような場合には，準周期解を考えることは，ある一つの代数曲線とその上の line bundle の変形を考えることに対

応していた。今考えている定常軸対称な Einstein 方程式の場合には、線型方程式 (3) はパラメーター λ に関する微分を含んでいる。又、Maison [2] は、パラメーターが、独立変数に依存する形の線型方程式の可積分条件として、(1) を書き直している。このように、線型方程式がパラメーターに関する微分を含む場合、あるいはパラメーターが、独立変数に依る場合には、上に述べた、代数曲線との対応関係は、どのようになるかをみようとするのが、ここで準周期解の構成を考える一つの動機である。

ここでは、方程式系 (2) を考えれば (つまり、$\det g = -\rho^2$, g: 対称、という付加条件を忘れれば)、その解は、一定のしかたで (ρ, z) に依存する超楕円曲線の family を考えることにより構成できることを示す。定常軸対称な Einstein 方程式の解を得るには、更に、超楕円曲線の形を制限してゆくことが必要であると思われる。

1. $\mu_j(\rho, z)$, $j=1, \cdots, N$ (N は任意の自然数) を二次方程式

$$\mu_j^2 - 2(w_j - z)\mu_j - \rho^2 = 0, \qquad w_j \in \mathbb{C}$$

の根とする。(注. $-\frac{\rho^2}{\mu_j}$ も根となる。)

このとき

$$L = \{ f(\lambda,p,z) = (f_+(\lambda,p,z), f_-(\lambda,p,z))\ ;\ f \text{ は } \lambda \text{ の有理関数で } \mu_j(p,z) \text{ に一位の極をもつ} \}$$

なる線型空間を考える。これは (p,z) をとめる毎に $2N+2$ 次元である。更に $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $j=1,\cdots,N$ とし、次のような L の部分空間を考える。

$$L_0 = \left\{ f \in L\ ;\ \begin{array}{l} a_j f_+(-\frac{p^2}{\mu_j},p,z) + b_j f_-(-\frac{p^2}{\mu_j},p,z) = 0 \\ (\lambda-\mu_j)\left(b_j f_+(\lambda,p,z) - a_j f_-(\lambda,p,z)\right)\big|_{\lambda=\mu_j} = 0 \end{array} \quad j=1,\cdots,N \right\}$$

L_0 は 2 次元となる。f_1, f_2 を L_0 の基底で $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\infty,p,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なるものとし、$\psi = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ とおく。

U, V を

$$2p\,\psi_\lambda(ip,p,z) = (V-iU)\psi(ip,p,z), \quad 2p\,\psi_\lambda(-ip,p,z) = (V+iU)\psi(-ip,p,z)$$

から決め、

$$D_1\psi - \frac{pV-\lambda U}{\lambda^2+p^2}\psi, \quad D_2\psi - \frac{pU+\lambda V}{\lambda^2+p^2}\psi$$

なる関数を考える。μ_j の選び方から、これらの関数は $\lambda=\mu_j$ で二位の極はもたない。又、U, V の決め方から、$\lambda = \pm ip$ に極はない。従って、これらの関数の行は L に属する。更にこれらの行が L_0 に属することも容易に確かめられる。そしてこれらの行が $\lambda=\infty$ で 0 となることも容易にわかる。従って、L_0 の定義から、これらの行の成分である関数は恒等的に零となる。つまり、

$$D_1\psi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\psi, \quad D_2\psi = \frac{\rho U+\lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\psi$$

が成り立ち，U, V は (2) をみたす。又 L_0 の定義から，$\psi(\lambda)^t\psi(-\frac{\rho^2}{\lambda})$ が λ によらないことが示される。$g=\psi(0,\rho,z)$ とおくと，前に述べたことから g は (1) をみたしているが，上の性質から，g は対称にもなっている。こうして，定常軸対称な Einstein 方程式の解が構成できる。

尚，このようにして得られる解は，Belinski–Zakharov の方法で，g_0, f_0 を Minkowski 空間の metric とした場合のソリトン解と一致する。

2. 次のような超楕円曲線の family を考える。

$$R_{(\rho,z)}: \mu^2 + \alpha\prod_{j=1}^{2g+2}(\lambda-\lambda_j(\rho,z)) = 0, \quad \alpha: \text{定数}.$$

$\lambda_j(\rho,z)$ は二次方程式

$$\lambda_j^2 - 2(a_j - z)\lambda_j - \rho^2 = 0, \quad a_j\in\mathbb{C}$$

の根。更に，$d_j(\rho,z)$, $j=1,\cdots,g+1$ を，$R_{(\rho,z)}$ の点で，その $\mathbb{P}^1$ への射影 $\lambda(d_j)$ は，二次方程式

$$(\lambda(d_j))^2 - 2(w_j - z)(\lambda(d_j)) - \rho^2 = 0, \quad w_j \in \mathbb{C}$$

であるような点とする。

$R_{(\rho,z)}$ 上の有理関数で，d_j に一位の極をもつもの全体は二次元の線型空間となる。その基底 ψ_1, ψ_2 を，

$$\psi_1(P_\infty^+;\rho,z)=\psi_2(P_\infty^-;\rho,z)=1,\quad \psi_1(P_\infty^-;\rho,z)=\psi_2(P_\infty^+;\rho,z)=0$$

なる条件で選ぶ.（ここで $P_\infty^\pm$ は $R_{(\rho,z)}$ 上の点で $\mathbb{P}^1$ への射影が ∞ となる点） U, V を 1. と同様に,

$$2\rho\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_1(p;\rho,z) & \psi_1(\theta p;\rho,z)\\ \psi_2(p;\rho,z) & \psi_2(\theta p;\rho,z)\end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda(p)=i\rho}=(V-iU)\begin{pmatrix}\psi_1(p;\rho,z) & \psi_1(\theta p;\rho,z)\\ \psi_2(p;\rho,z) & \psi_2(\theta p;\rho,z)\end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda(p)=i\rho}$$

$$2\rho\frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\qquad // \qquad\Bigg)\Bigg|_{\lambda(p)=-i\rho}=(V+iU)\Bigg(\qquad // \qquad\Bigg)\Bigg|_{\lambda(p)=-i\rho}$$

（t は $\lambda(p)=\pm i\rho$ なる点 p のまわりの local parameter, θ は sheet change）から決め, $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ とおいて, 関数

$$D_1\psi-\frac{\rho V-\lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\psi\ ,\quad D_2\psi-\frac{\rho U-\lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\psi$$

を考える. ここで, 作用素 D_j の中の ∂_λ は, $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}$（$t$ は local parameter）とする. これらの関数は, d_j の選び方から $R_{(\rho,z)}$ 上 d_j に二位の極をもたず, U, V の選び方から, $\mathbb{P}^1$ への射影が $\pm i\rho$ となる点でも極をもたず, 又 λ_i の選び方から, それ以外の点では極をもたないことがわかる.（一般の λ_i に対しては, 分岐点 λ_i で極をもつ）. 従って, これらの関数は, $R_{(\rho,z)}$ 上で d_j に高々一位の極をもち, それ以外では正則な有理関数である. これらの関数は $P_\infty^\pm$ で零点を持っているので, $R_{(\rho,z)}$ 上恒等的に零であることがわかる. つまり,

$$D_1\psi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\psi, \quad D_2\psi = \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\psi$$

なる式が．超楕円曲線 $R(\rho,z)$ の family となりたつ。従って U, V は (2) をみたす．

問題は．

$$g = \begin{pmatrix} \psi_1(p_0^+;\rho,z) & \psi_1(p_0^-;\rho,z) \\ \psi_2(p_0^+;\rho,z) & \psi_2(p_0^-;\rho,z) \end{pmatrix}$$

がいつ対称になるかということである。その条件は．今のところまだわからない．ただ．その為には．出発点にとる curve の family として

$$R(\rho,z):\ \mu^2 + \alpha \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda^2 - 2(q_j - z)\lambda - \rho^2) = 0$$

をとり．$R(\rho,z)$ の involution

$$(\lambda,\mu) \longmapsto \left(-\frac{\rho^2}{\lambda}, \pm\sqrt{(-1)^{g+1}}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{g+1}\mu\right)$$

を用いること．B が pole d_i の個数を増やすこと等が．必要であると思われる。

References

1. V. A. Belinski and V. E. Zakharov; Jour. Exp. Theor. Phys. vol. 75 1953 (1978), vol. 77, 3, (1979) (in Russian)
2. D. Maison: Phys. Rev. Lett., vol. 41, 521, (1978), Jour. Math. Phys. vol. 20, 871 (1979)